

crecimiento de burbujas esféricas en un líquido calentado uniformemente*

Nelson Moraga Benavides**

RESUMEN: Se presenta una revisión de las teorías relativas al crecimiento de burbujas libres de formas esféricas en un líquido inicialmente sobrecalentado. Las ecuaciones que gobiernan el fenómeno escritas en forma adimensional permiten demostrar que una descripción general del crecimiento de la burbuja consiste en un problema de cinco parámetros, donde los grupos adimensionales son: los números de Reynolds, de Weber, de Jakob, de Marangoni y la transferencia de masa adimensional debida a la evaporación en la interface. Se presenta una solución simple para el crecimiento de la burbuja válida para geometría esférica. La comparación con otros modelos y con datos experimentales para agua con un número de Jakob de 108 señala que la descripción del proceso de crecimiento ha mejorado.

SUMMARY: A survey of the theories concerned with spherically symmetric growth of free bubbles in initially superheated pure liquids is presented. The governing equations are formulated in a nondimensional form and is found that a general description of the bubble growth consists in a five parameters problem, where the controlling groups are: the Reynolds, Weber, Jakob and Marangoni numbers, and the nondimensional mass transfer due to evaporation at the interface. A simple solution for the bubble growth valid for spherical shape is presented. The comparison with other models and with experimental data for water with a Jakob number of 108 shows that an improved description has been obtained.

* Manuscrito revisado y aprobado en forma definitiva en julio de 1983.

** Departamento de Mecánica, Facultad de Ingeniería, Universidad de Santiago de Chile (USACH).

1. INTRODUCCION

Nucleación, crecimiento, partida y ascenso de la burbuja son algunos de los procesos fundamentales de ebullición. Desafortunadamente, descripciones analíticas exactas de dichos procesos no son posibles debido a los diferentes mecanismos físicos involucrados. En especial, en el crecimiento de burbujas, la situación se complica pues existen diferentes regímenes.

Inmediatamente después de que la burbuja se ha formado, las fuerzas de inercia que resultan del desplazamiento del líquido que la rodean gobiernan su velocidad de crecimiento. La burbuja crece porque las fuerzas debido a la presión del vapor superan las fuerzas debido a la tensión superficial. Este régimen se considera controlado hidrodinámicamente y el proceso se supone a temperatura constante. Uno de los primeros trabajos relacionados con el crecimiento de burbujas está relacionado con el régimen inicial y se debe a Rayleigh¹, 1920. El encontró que durante el régimen controlado hidrodinámicamente y mientras el proceso es isotérmico, el radio de la burbuja crece en forma proporcional con el tiempo. Debido al flujo de calor entre la capa límite sobrecalentada y la burbuja en expansión, la temperatura cerca de la interface decrece, la diferencia de presiones llega a ser despreciable, y el período inicial es seguido por un flujo de calor transiente desde las regiones de líquido sobrecalentado a la interface. Durante este período el diámetro de la burbuja crece proporcionalmente al número de Jakob y a la raíz cuadrada del tiempo. Este régimen se conoce como controlado por difusión y el proceso se supone adiabático. El primer intento exitoso para describir la dinámica de la burbuja durante este régimen parece ser el de Bosnjaković², en 1930.

Se han propuesto diversas hipótesis para explicar los mecanismos físicos de la transferencia de calor. La mayoría se basa en suponer que el calor se transmite desde la pared caliente al líquido adyacente y a las burbujas.

La hipótesis de microconvección presentada en 1933 por Jakob³ explica los valores altos de flujo de calor cerca de la superficie debido a un flujo convectivo o micropulsaciones que origina el rápido crecimiento y partida de las burbujas seguidas por una recirculación del líquido frío cerca de la pared. A consecuencia de esto, el líquido cerca de la pared se mantiene en un movimiento rápido.

La hipótesis de conducción transiente presentada por Kast⁴ en 1964, supone que un flujo de calor por conducción entre la pared y el líquido determina el sobrecalentamiento de la capa de líquido hasta que la cavidad llega a ser activa. Las burbujas se adhieren a la pared de modo que no existe una película de líquido entre ellas y la pared. El crecimiento de las burbujas se debe al aumento de la energía interna de la capa límite sobrecalentada.

La teoría de la microcapa evaporativa establecida por Van Stralen⁵ en 1967, supone que las burbujas crecen a partir de una microcapa de líquido sobrecalentado que se crea bajo ellas. Así la temperatura de la pared disminuye tan pronto como la burbuja comienza a crecer y la película líquida bajo las burbujas libera energía.

Otra hipótesis ha sido presentada por Han y Griffith en 1965⁶. Cada burbuja se asocia con un área de influencia que ocupa el doble del diámetro de la burbuja. Dentro de esta área se desarrolla una capa límite de líquido sobrecalentado, el cual es eventualmente empujado en la masa de fluido a menor temperatura. El fluido frío fluye por continuidad hacia el espacio debajo de la burbuja donde queda en contacto con la pared. Este líquido se calienta principalmente por conducción. Fuera de este rango asociado con burbujas simples, la transferencia de calor tiene lugar por convección natural.

2. REVISION DE LA TEORIA

2.1. Crecimiento inicial de la burbuja (controlado hidrodinámicamente)

Ecuación de Rayleigh¹, 1920. Considerando una burbuja de forma esférica en un líquido

incompresible de extensión infinita, un balance de masa en la interface relaciona la componente de la velocidad del líquido en dirección radial con la velocidad de desplazamiento de la interface \dot{R} :

$$-\rho_v \dot{R} = \rho_\ell [u(\dot{R}) - \dot{R}] \rightarrow u(\dot{R}) = (1 - \frac{\rho_v}{\rho_\ell}) \dot{R} \quad (1)$$

La componente radial de la velocidad del líquido a una distancia r desde el centro de la esfera, $R < r < \infty$, es

$$u(r) = \epsilon \dot{R} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \quad (2)$$

donde $\epsilon = 1 - \rho_v/\rho_\ell$ es la transferencia de masa debida a la evaporación.

La ecuación del momentum lineal para la región del líquido despreciando la disipación viscosa es

$$\rho_\ell \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} \quad (3)$$

Cuando $\rho_v \ll \rho_\ell$ la transferencia de masa debido a la evaporación puede considerarse despreciable; i.e., cuando $\rho_v \rightarrow 0 \Rightarrow \epsilon \rightarrow 1$. En este caso, la substitución de $u(r)$ a partir de la Ec. (2) en Ec. (3), y la integración desde la interface hasta el infinito conduce a

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2} \dot{R}^2 = \frac{\rho_\ell(R) - \rho_\ell(\infty)}{\rho_\ell} \quad (4)$$

La ecuación de la Laplace relaciona la presión del vapor con la presión del líquido y con la tensión superficial suponiendo que existe equilibrio mecánico y térmico. Para geometría esférica:

$$\rho_v - \rho_\ell = \frac{2\sigma}{R} \quad (5)$$

Utilizando este resultado en Ec. (4) se obtiene la ecuación de Rayleigh

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2} \dot{R}^2 = \frac{\rho_v - \rho_\ell(\infty)}{\rho_\ell} - \frac{2\sigma}{\rho_\ell R} \quad (6)$$

La ecuación (6) es válida para la dinámica de una burbuja isotérmica y por esta razón se supone válida sólo para el inicio del crecimiento.

El radio de la burbuja correspondiente al estado de equilibrio termodinámico, R_0 debe ser excedido a fin de garantizar el crecimiento. La ecuación de Clausius-Clapeyron expresada en forma de diferencias finitas puede combinarse con la ecuación de Laplace para obtener.

$$R_0 = \frac{2\sigma}{\Delta p(0)} = \frac{2\sigma T_{\text{sat}}}{\rho_v h_{fg}(T_v - T_{\text{sat}})} \quad (7)$$

La solución asintótica de Rayleigh para el caso isotérmico se obtiene despreciando la aceleración \ddot{R} en la ecuación (4) y suponiendo que $\rho_\ell(R) - \rho_\ell(\infty) = \Delta p(0) = \text{constante}$:

$$\frac{3}{2} \dot{R}^2 = \frac{\Delta p(0)}{\rho_\ell} \quad (8)$$

Separando variables e integrando se obtiene

$$R(t) = \left(\frac{2}{3} \frac{\Delta p(0)}{\rho_\ell} \right)^{1/2} t + R_0; R_0 \ll R \quad (9)$$

que después de la substitución para $\Delta P(0)$ en la Ec. (6) conduce a

$$R(t) = \left(\frac{4\sigma}{3\rho_\ell R_0} \right)^{1/2} t = \left(\frac{2}{3} \frac{\rho_v h_{fg}(T_v - T_{sat})}{\rho_\ell T_{sat}} \right)^{1/2} t \quad (10)$$

La ecuación (10) ha sido usada para describir el proceso inicial de crecimiento considerando proceso isotérmico. Los términos $R\ddot{R}$ y $\frac{3}{2}\dot{R}^2$ determinan la dinámica durante este régimen. Sin embargo, para derivar la Ec. (10) el término $R\ddot{R}$ ha sido despreciado. En realidad, desde un punto de vista físico, esta no es una buena suposición para la descripción del crecimiento en el instante inicial.

2.2 Crecimiento asintótico de la burbuja (controlado por difusión)

*Teoría de Bosnjaković*² (1930). Se supone que la transferencia de calor desde el líquido sobrecalentado a la interface es por conducción en la capa límite originando la evaporación.

$$\dot{q}'' = k \frac{T_{sup} - T_{sat}}{\delta}, \quad \dot{q}'' = \frac{\dot{q}}{A} \quad (11)$$

El balance de energía en la interface líquido-vapor, $r = R$, es

$$\rho_v h_{fg} \frac{dR}{dt} = k_\ell \left(-\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=R} = k_\ell \left(-\frac{T_{sup} - T_{sat}}{\delta} \right) \quad (12)$$

donde el espesor de conducción δ se supone proporcional a la expresión válida para el caso de conducción transiente en un cuerpo homogéneo semiinfinito

$$\delta = C (\alpha_\ell t)^{1/2} \quad (13)$$

Bosnjaković considera que la constante de proporcionalidad es igual a 1. La substitución para δ en Ec. (12), separación de variables e integración, permite obtener.

$$R(t) = 2 Ja (\alpha_\ell t)^{1/2} \quad (14)$$

donde el número de Jakob es

$$Ja = \frac{\rho_\ell C_{p\ell}(T_{sup} - T_{sat})}{\rho_v h_{fg}} \quad (15)$$

La ecuación (14) es válida para el crecimiento asintótico; es decir, para $R \gg R_0$, y es la típica expresión para el régimen controlado por difusión de calor. Muchos de los modelos aceptados para el crecimiento de la burbuja se han derivado a partir de esta teoría.

La ecuación (14) describe el radio instantáneo de la burbuja durante el período de difusión y puede generalizarse escribiendo

$$R(t) = d Ja (\alpha_\ell t)^{1/2} \quad (16)$$

La tabla 1 resume los valores de la constante d obtenida por diversos modelos.

2.3. Transición entre crecimiento isotérmico e isobárico

(i) *Solución de Cooper y Vijuk*¹⁰ (1970). Ellos sugieren que la presión baja del sistema es

Tabla 1

CONSTANTE d PARA LA EXPRESION GENERAL DE R(t)

	d
Bosnjaković ² , (1930)	2,0
Plesset y Zwick ⁷ , (1954)	1,954
Forster y Zuber ⁸ , (1954)	0,89
Scriven ⁹ , (1954)	1,954
Cooper y Vijuk ¹⁰ , (1970); (solamente microcapa evaporativa)	$0,443 P_r^{-1/5}$
Van Ouwerkerk ¹¹ , (1971)	3,08
Van Stralen y otros ¹² , (1974) (solamente microcapa relajada)	$1,954 b; 0 \leq b \leq 1$
Van Stralen y otros ¹² , (1974) (solamente microcapa evaporativa)	$0,373 P_r^{-1/6}$

uno de los factores que promueven la formación de una microcapa de líquido y conducen a la forma hemisférica durante el crecimiento de la burbuja. El espesor inicial de la capa hidrodinámica bajo la burbuja se obtuvo resolviendo una forma simple de la ecuación de Navier-Stokes para la velocidad del líquido en la microcapa y suponiendo que la burbuja crece proporcionalmente a la raíz cuadrada del tiempo, $R \sim t^{1/2}$,

$$\delta_o(r) = \frac{1}{2} \left(\frac{r}{R} \right) (\pi \nu t)^{1/2} = \frac{1}{2} \left(\frac{r}{R} \right) (\pi \alpha_\ell t)^{1/2} Pr^{1/2} \quad (17)$$

Para una superficie altamente conductora de calor, es decir, para el caso controlado hidrodinámicamente, se obtiene

$$R(t) = \frac{4}{\pi^{1/2}} Pr^{-1/2} Ja (\alpha_\ell t)^{1/2} = 2,26 Pr^{-1/2} Ja (\alpha_\ell t)^{1/2} \quad (18)$$

y

$$R(t) = \frac{2}{1/2} \left(\frac{k_\omega \rho_\omega C_\omega}{k_\ell \rho_\ell C_\ell} \right)^{1/2} Ja (\alpha_\ell t)^{1/2} = 1,13 \left(\frac{k_\omega \rho_\omega C_\omega}{k_\ell \rho_\ell C_\ell} \right)^{1/2} x Ja (\alpha_\ell t)^{1/2} \quad (19)$$

para el caso de una superficie de baja conductividad (caso controlado térmicamente).

La ecuación (18) se puede obtener mediante un balance de energía en la interface suponiendo que la forma de la burbuja es hemisférica y la resistencia térmica de la microcapa es $\delta_o / 2k$, con el espesor de capa límite δ_o computado mediante la ecuación (17); es decir,

$$\dot{q}_\omega'' = 2\rho_\nu h_{fg} \frac{dR}{dt} = \frac{(T_{sup} - T_{sat})}{\frac{\delta_o}{2k}} \bigg|_{r=R} \quad (20)$$

Suponiendo que la posición de la interface puede obtenerse en analogía con la resistencia térmica correspondiente a la solución de Rayleigh¹ para el período inicial (caso isotérmico), la combinación, en serie, de la ecuación (10) con la superficie de conductividad térmica alta, Ec. (18), permite obtener

$$R(t) = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \Rightarrow$$

$$R(t) = \frac{1}{\left(\frac{3\rho_\ell T_{\text{sat}}}{2\rho_\nu h_{fg}(T_{\text{sup}} - T_{\text{sat}})t^2} \right)^{1/2} + \frac{(\pi \text{Pr})^{1/2}}{4 \text{Ja}(\alpha_\ell t)^{1/2}}} \quad (21)$$

(ii) *Mikic, Rohsenow y Griffith*¹³ (1970). Despreciando la evaporación en la microcapa y usando la relación entre T_v y dR/dt propuesta por Plesset y Zwich para un líquido uniforme sobrecalentado ellos obtuvieron que

$$R(t) = \frac{1,706 \alpha_\ell \text{Ja}^2}{\left(\frac{h_{fg} \rho_\nu \Delta T}{\rho_\ell T_{\text{sat}}} \right)^{0.5}} \left\{ \left[\frac{0,118 h_{fg} \rho_\nu \Delta T}{\rho_\ell T_{\text{sat}} \alpha_\ell \text{Ja}} t + 1 \right]^{1.5} - \left[\frac{0,118 h_{fg} \rho_\nu \Delta T}{\rho_\ell T_{\text{sat}} \alpha_\ell \text{Ja}} t \right]^{1.5} - 1 \right\} \quad (22)$$

Las ecuaciones (21) y (22) se suponen válidas durante el ciclo completo de crecimiento de la burbuja. Ambas ecuaciones tienden a la solución de Rayleigh cuando $t \rightarrow 0$.

3. ANALISIS

3.1. Ecuaciones básicas y Parámetros adimensionales

Usando la suposición de flujo laminar, un fluido newtoniano-incompresible de viscosidad constante y despreciando la disipación de energía, las ecuaciones que gobiernan el crecimiento de la burbuja son:

Continuidad:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\epsilon r^2 u) = 0 \quad (23)$$

Momentum lineal:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} = \phi(t) + \nu \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial u}{\partial r}) \quad (24)$$

ENERGIA:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial r} = \alpha_\ell \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial T}{\partial r}) \quad (25)$$

donde la función forzante ϕ es

$$\phi = - \frac{1}{\rho_\ell} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (26)$$

Las condiciones de borde e iniciales son:

C.B. en

$$r = R : u(R) = \epsilon \frac{dR}{dt} ; T(R) = T_{\text{sat}} \quad (27)$$

$$k_\ell \frac{\partial T}{\partial r} \bigg|_{r=R} = \rho_\nu h_{fg} \frac{dR}{dt} \quad (28)$$

en

$$r \rightarrow \infty : u(\infty) = 0 ; T(\infty) = T_{\text{sup}} \quad (29)$$

$$\text{C.I. para } t = 0 : R(0) = R_0 ; T(0) = T_{\text{sup}} \quad (30)$$

donde ϵ evalúa, en un modo adimensional, la transferencia de masa debido a evaporación.

$$\epsilon = 1 - \frac{\rho_v}{\rho_\ell} \quad (31)$$

El problema se puede escribir en términos de parámetros adimensionales (indicados por superíndices con asterisco), viz.

$$u^* = \frac{u}{V_0}, r^* = \frac{r}{R}; t^* = \frac{t}{T_0}; T^* = \frac{T - T_{\text{sat}}}{T_{\text{sup}} - T_{\text{sat}}} \quad (32)$$

donde V_0 y T_0 son valores de referencias apropiados de la velocidad y del tiempo, respectivamente, y R es el radio de la burbuja. Utilizando estas definiciones las ecuaciones que gobiernan el proceso en forma adimensional son:

$$\frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial}{\partial r^*} (\epsilon r^{*2} u^*) = 0 \quad (33)$$

$$\text{Re} \left\{ \Omega \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial r^*} \right\} = \text{Re} \Phi^* + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^{*2} \frac{\partial u^*}{\partial r^*}) \quad (34)$$

$$\text{Pe} \left\{ \Omega \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right\} = \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^{*2} \frac{\partial T^*}{\partial r^*}) \quad (35)$$

donde Re es el número de Reynolds, Ω es un parámetro adimensional que debe ser determinado a partir de las condiciones de contorno, y Pe es el número de Péclet.

$$\text{Re} = \frac{RV_0}{\nu} \quad (36)$$

$$\Omega = \frac{R}{V_0 T_0} \quad (37)$$

$$\text{Pe} = \text{Re} \text{Pr}; \text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha} \rightarrow \text{Pe} = \frac{RV_0}{\alpha} \quad (38)$$

La función forzante para el proceso se determina a partir de la ecuación (26). En forma adimensional resulta

$$\phi^* = -\frac{R}{V_0^2} \frac{1}{\rho_\ell} \frac{\Delta p}{R} \rightarrow \phi^* = -\frac{\Delta p}{\rho_\ell V_0^2} \quad (39)$$

El término a mano derecha de la ecuación anterior es un coeficiente de presión que en la forma adimensional se conoce como número de Euler.

Una expresión más conveniente para la función puede encontrarse si la diferencia de presiones se expresa en términos de la tensión superficial. La ecuación de Laplace modificada por Thomson para el caso de una transferencia de masa en la interface debida a la evaporación es

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R} \frac{1}{\epsilon} \quad (40)$$

con lo cual se obtiene la forma adimensional de la función forzante.

$$\phi^* = -\frac{1}{V_0^2 \rho_\ell} \frac{2\sigma}{R\epsilon} = -2 We \quad (41)$$

donde We es el número de Weber

$$We = \frac{1}{V_0^2 \rho_\ell} \frac{\sigma}{R\epsilon}; We = \frac{\sigma}{\rho_\ell R \epsilon^3 \left(\frac{dR}{dt}\right)^2} \quad (42)$$

El valor de la velocidad de referencia V_0 puede ser expresada en términos del número de Weber.

$$V_0 = \left(\frac{\sigma}{\rho_\ell R_\epsilon} \frac{1}{We} \right)^{1/2} \quad (43)$$

Una expresión apropiada para el valor del tiempo de referencia T_0 se obtiene utilizando la condición de contorno derivada del balance de energía en la interface, $r = R$. En forma adimensional la ecuación (28) es

$$\frac{\alpha_\ell}{R} \cdot \left(\frac{\rho_\ell}{\rho_v} \frac{C_{p\ell} (T_{sup} - T_{sat})}{h_{fg}} \right) \cdot \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \Big|_{r^* = R^*} = \frac{R}{T_0} \frac{dR^*}{dt^*} \quad (44)$$

que sugiere la siguiente expresión para T_0 .

$$T_0 = \frac{R^2}{\alpha_\ell} \frac{1}{Ja} \quad (45)$$

donde Ja es el número de Jakob

$$Ja = \frac{\rho_\ell}{\rho_v} \frac{C_{p\ell} (T_{sup} - T_{sat})}{h_{fg}} \quad (46)$$

La substitución de V_0 y T_0 en la definición del parámetro adimensional Ω conduce a

$$\Omega = \frac{1}{\epsilon} \frac{Ja \sqrt{We}}{M} \quad (47)$$

donde M es el número de Marangoni,

$$M = \frac{\Delta\sigma}{\Delta T} \dot{q} \frac{R^2 C_L}{2} \quad (48)$$

que puede relacionarse con el número de Reynolds y el número de Prandtl,

$$Re Pr = M \quad (49)$$

Con estas definiciones las ecuaciones que gobiernan el crecimiento de una burbuja con evaporación en la interface vienen a ser

$$\frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial}{\partial r^*} (\epsilon r^{*2} u^*) = 0 \quad (50)$$

$$\text{Re} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \frac{\text{Ja} \sqrt{\text{We}}}{M} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial r^*} \right\} = 2 \text{Re} \text{We} + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^{*2} \frac{\partial u^*}{\partial r^*}) \quad (51)$$

$$M \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \frac{\text{Ja} \sqrt{\text{We}}}{M} \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right\} = \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^{*2} \frac{\partial T^*}{\partial r^*}) \quad (52)$$

Cinco parámetros adimensionales controlan el crecimiento de la burbuja: los números de Reynolds, Jakob, Weber y Marangoni, y la transferencia de masa adimensional debida a la evaporación en la interface. Una solución general significa resolver un problema de cinco parámetros. Al mismo tiempo, la ecuación del momentum lineal y la ecuación de la energía están acopladas y son no-lineales. Una aproximación posible es analizar algunos casos asintóticos. En la sección que sigue se presenta un ejemplo de este procesamiento.

Solución asintótica para $\text{Ja} \ll 1$ y $M \ll 1$

El comportamiento de la burbuja para casos en que $\text{Ja} \ll 1$ y $M \ll 1$ se puede analizar a partir de la ecuación de la energía. En estos casos, la Ec. (52) se reduce a:

$$\frac{\alpha_\ell}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \frac{dT}{dr}) = 0 \quad (53)$$

con las condiciones de contorno e inicial descritas por las ecuaciones (27) y (28).

La distribución de temperaturas resulta.

$$T(r) = T_{\text{sup}} - (T_{\text{sup}} - T_{\text{sat}}) \frac{R}{r} \quad (54)$$

con lo cual se puede determinar el gradiente de temperaturas evaluado en la interface y satisfacer el balance de energía en $r = R$

$$\frac{k_\ell (T_{\text{sup}} - T_{\text{sat}})}{R} = \rho_v h_{fg} \frac{dR}{dt} \quad (55)$$

Separación de variables e integración permite obtener

$$R(t) = \sqrt{R_0^2 + 2 \text{Ja} \alpha_\ell t}, \text{Ja} \ll 1, M \ll 1 \quad (56)$$

La solución asintótica obtenida es válida para valores pequeños de los números de Jakob y de Marangoni. En el primer caso, la situación física puede lograrse en un sistema a alta presión con un sobrecalentamiento pequeño, y un fluido que tenga un valor alto de entalpía de evaporación. La segunda condición, $M \ll 1$, puede alcanzarse en un fluido altamente viscoso y buen conductor del calor, es decir, cuando el diámetro de la burbuja es extremadamente pequeño.

3.2. Interacción de las microcapas de relajación y de evaporación

El desarrollo de una microcapa es típico en el crecimiento de una burbuja. Por una parte, la burbuja empuja el líquido sobrecalentado en frente de ella en la llamada microcapa de relajación y, por otra, simultáneamente construye una microcapa de evaporación en la vecindad de la pared sólida a la cual se encuentra adherida.

Inmediatamente después de que se alcanza el radio de equilibrio, una microcapa líquida

de poco espesor aparece bajo la burbuja. Esta teoría de la microcapa evaporativa durante la ebullición nucleada de agua sobre la superficie plana, fue propuesta por Snyder¹⁴ en 1956. Más tarde, Moore y Mesler¹⁵ usaban este concepto para explicar las fluctuaciones en valores locales de la temperatura de la pared. Madsen y Bonilla¹⁶ han realizado observaciones similares en metales líquidos. Más recientemente, la presencia de la microcapa evaporativa ha sido demostrada usando elementos en estado sólido muy sensitivos a los cambios de temperatura por Cooper y Lloyd¹⁷ y por medio de efectos ópticos (reflexión de haces luminosos)^{18,11}, o bien usando interferometría^{19,20}.

Una explicación de la interacción de la microcapa de relajación (alrededor del domo) y la microcapa evaporativa (debajo de la burbuja) ha sido presentada por Van Stralen *et al*¹². Ellos encontraron que la razón entre la contribución al crecimiento debida a la microcapa evaporativa y causada por la microcapa de relajación es independiente del tiempo y del sobrecalentamiento inicial de la pared. La contribución relativa entre ella es:

$$\frac{\text{Microcapa Evaporativa}}{\text{Microcapa de Relajación}} = \frac{0,373 \text{ Pr}^{-1/6} (C_{1,m}/C_{1,p})}{1,954 b^*} = \frac{0,1908 \text{ Pr}^{-1/6}}{b^*} \frac{C_{1,m}}{C_{1,p}} \quad (57)$$

donde b^* es un parámetro adimensional de crecimiento durante la adherencia que se encuentra empíricamente en función de la altura máxima de la burbuja. La razón $C_{1,m}/C_{1,p}$ es válida para mezclas binarias y tiene un valor igual a 1 para líquidos puros.

Una tabla con valores de la razón entre las contribuciones al crecimiento debidas a las dos microcapas en función de la presión ha sido presentada por Van Stralen y Cole²¹ para el caso de agua. La figura 1, construida en base a la información citada, muestra el efecto relativo de ambos mecanismos. En esta figura se puede observar que para el agua, la contribución relativa de la microcapa evaporativa aumenta desde 0,1, para una presión $P = 26,7$ KPa, a alrededor de 0,97 para $P \sim 4$ KPa, en donde toma un valor máximo. Para valores de la presión inferior a 4 KPa la influencia de la microcapa evaporativa en el crecimiento disminuye rápidamente. Los bajos valores de la razón analizada cuando $P \rightarrow 0$ se explican debido a la

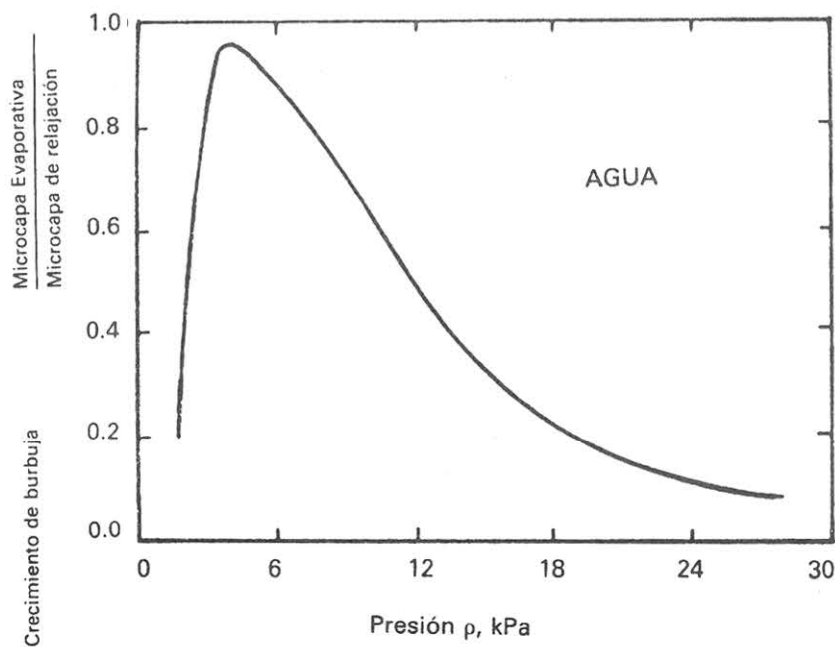


Figura 1. Relación entre microcapa de evaporación y microcapa de relajación con la presión.

influencia dominante que la inercia del líquido tiene en el crecimiento de burbujas a bajas presiones.

3.3. Solución analítica para una microcapa evaporativa despreciable

El modelo de Van Stralen *et al*¹² está basado en la solución de Pohlhausen²². Se supone que la microcapa de líquido debajo de una burbuja de vapor hemisférica se forma inicialmente como una capa límite laminar en la cual existe un flujo paralelo a través de una superficie plana calentada uniformemente. Sin embargo, como se puede apreciar en la figura 1, la influencia de la microcapa evaporativa viene a ser despreciable a medida de que el número de Jakob disminuye (una razón entre las microcapas evaporativas y de relajación aproximadamente igual a 0,1 ha sido calculada para agua con $Ja = 108$).

Una explicación para el extraño comportamiento de la microcapa evaporativa fue presentada por Puzyrev *et al*²³ en 1976. Ellos sugieren que el rango de los parámetros dentro del cual esta microcapa puede existir está relacionada con la forma de la burbuja de vapor. Para presiones bajas (altos valores del número de Jakob, crecimientos rápidos), ellos encontraron que las burbujas tenían forma casi hemisférica y en esos casos existía una microcapa evaporativa debajo de ellas. Para crecimientos con números de Jakob pequeños (relativamente lentos, presiones altas), las burbujas eran casi esféricas y una microcapa evaporativa era imposible de distinguir.

Un análisis teórico nuevo para el crecimiento de burbujas cuando la microcapa de evaporación es despreciada se presenta a continuación. Suponiendo que la burbuja tiene una forma esférica, y basado en la expresión para el número de Nusselt para flujo alrededor de una esfera con temperatura constante presentada por Kays y Crawford²⁴, se tiene:

$$Nu_R = 0,93 Re_R^{1/2} Pr^{0,4}; Re_R = \frac{R\dot{R}}{\nu}; R = \frac{dR}{dt} \quad (58)$$

La ecuación (58) es válida para flujo laminar y ha sido obtenida utilizando la transformación de Mangler y la aproximación de similitud.

Utilizando la definición del número de Nusselt, el coeficiente de transferencia de calor resulta,

$$Nu_R = \frac{h R}{k} \rightarrow h = 0,93 k_\ell Pr^{0,4} \nu_\ell^{-1/2} \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^{1/2} \quad (59)$$

Mediante un balance de energía en la interface se puede escribir

$$h(T_{sup} - T_{sat}) = \rho_v h_{fg} \frac{dR}{dt} \quad (60)$$

La substitución de h en la ecuación (59) conduce a

$$0,93 Ja \sqrt{\alpha_\ell} Pr^{-1/10} \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^{1/2} = \dot{R} \quad (61)$$

Mediante separación de variables e integración entre $R = R_0$ para $t = 0$, y R para tiempo t , se puede obtener

$$R(t) = \sqrt{R_0^2 + (1.315 Ja \sqrt{\alpha_\ell} Pr^{-0,1})^2 t} \quad (62)$$

La expresión asintótica de la ecuación (62) se encuentra fácilmente despreciando R_0 .

$$R(t) \sim 1,315 Ja Pr^{-0,1} \sqrt{\alpha_\ell t} \quad (63)$$

Ecuación que puede describir el crecimiento de la burbuja cuando ésta mantiene una

forma esférica. Para el caso de agua esta situación se presenta cuando la presión del sistema es alta, o equivalente, para los casos en que el número de Jakob es pequeño.

4. RESULTADOS

A continuación se presenta una comparación de las predicciones teóricas para el crecimiento de una burbuja con los datos experimentales para agua.

Van Stralen *et al*¹² midieron el crecimiento de una burbuja en agua calentada uniformemente en el rango 2,0 a 27 KPa utilizando una cámara filmadora de alta velocidad. El equipo experimental consistió en un cilindro de cobre montado verticalmente en un recipiente de ebullición cilíndrica con un diámetro y altura de 0,52 m. La superficie exterior fue aislada térmicamente, y el cilindro calentado eléctricamente mediante calefactores especiales ubicados en la parte inferior. Las burbujas de vapor se originaron en una cavidad artificial de radio igual a 12,5 cm y de una profundidad 100 cm. En la superficie calefactora se colocaron 3 termocuplas que permitían calcular la densidad de flujo de calor.

Tres soluciones clásicas se comparan con la solución propuesta para el caso de que la forma de la burbuja se supone esférica, y con datos experimentales para agua a una presión de 26,7 KPa y con un número de Jakob de 108 en la figura 2. La nueva solución no considera la microcapa evaporativa. Tampoco incorpora la solución de Rayleigh para el crecimiento inicial, y describe el crecimiento de la burbuja en una manera muy simple.

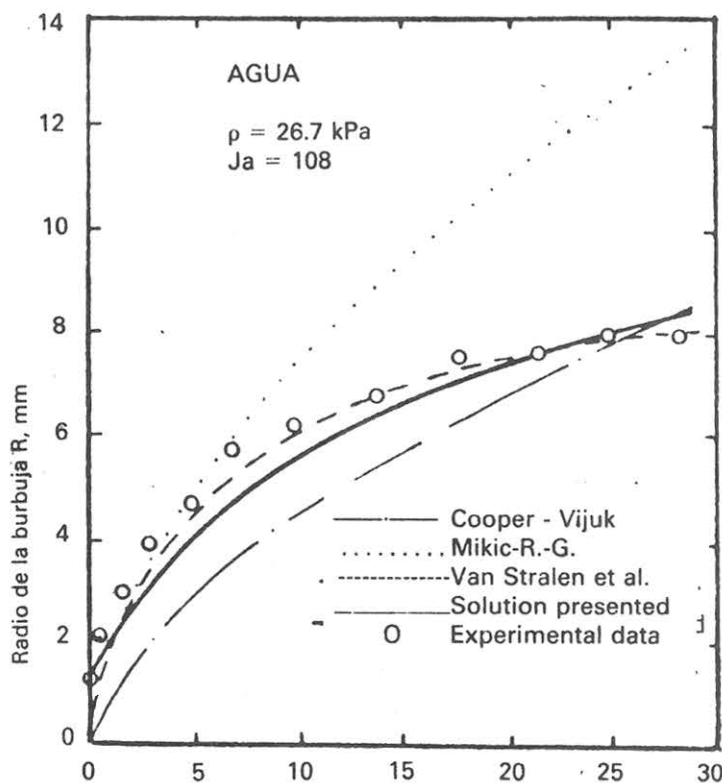


Figura 2. Comparación de soluciones analíticas con datos experimentales para crecimiento de burbujas.

De la comparación entre los cuatro modelos con los datos experimentales para el agua con $Ja = 108$ se concluye que el nuevo modelo muestra una excelente correlación con los valores experimentales durante todo el intervalo de tiempo que la burbuja está adherida a la pared. Ciertamente, representa un avance sobre los modelos de Mikic-Rohsenow y Griffith y

sobre el de Cooper-Vijuk, ya que la descripción es más sencilla. Solamente el modelo de Van Stralen y otro permiten una representación más precisa del movimiento que es fácil de explicar toda vez que se introduce el parámetro empírico b^* que permite un mejor ajuste.

5. CONCLUSIONES

Una solución general para el crecimiento de burbujas esféricas en un líquido uniformemente calentado supone resolver un problema de cinco parámetros: número de Reynolds, Weber, Jakob y de Marangoni, y la transferencia de masa adimensional en la interface. Se recomienda el estudio de casos asintóticos.

Se presenta un modelo simple válido para el crecimiento de las burbujas esféricas. La comparación con modelos previos y con datos experimentales para agua a una presión de 26,7 KPa y con un número de Jakob de 108 demuestra que se ha obtenido una mejor descripción.

NOMENCLATURA

b^*	Parámetro empírico adimensional.
C	Constante de proporcionalidad.
$C_{1,m}$ $C_{2,m}$	Constantes para mezclas binarias, $m/s^{1/2}K$.
C_p	Calor específico a presión constante, J/kgK .
d	Constante en la expresión general de $R(t)$.
Eu	Número de Euler = $\Delta p / \rho \ell U_0^2$.
h	Coefficiente de transferencia de calor, W/m^2K .
h_{fg}	Entalpía de evaporación, J/kg .
Ja	Número de Jakob = $\rho \ell C_{p\ell} (T_{sup} - T_{sat}) / \rho_v h_{fg}$.
k	Conductividad térmica, W/mK .
M	Número de Marangoni = $\Delta \sigma \dot{q} R^2 C_{p\ell} / 2\Delta T$.
Nu	Número de Nusselt = hR/k .
p	Presión, $Pa = kg/ms^2$.
Pe	Número de Peclet = $Repr = V_O R / \alpha$.
Pr	Número de Prandtl = ν / α .
\dot{q}	Flujo de calor, W/m^2 .
r	Distancia radial desde el centro de la burbuja, m .
r^*	Expresión adimensional de r , $r^* = r/R$.
R	Radio de la burbuja, m .
\dot{R}	Velocidad de la interface líquido-vapor, m/s .
\ddot{R}	Aceleración de la interfase, m^2/s .
Re	Número de Reynolds = $V_O 2R / \nu$.
R_O	Radio de equilibrio de la burbuja = $2T\sigma / \rho_v h_{fg} (T_{sup} - T_{sat})$, m .
t	Tiempo de crecimiento de la burbuja, s .
t^*	Tiempo adimensional = $\sigma \ell J_a t / R^2$.
T	Temperatura absoluta, K .
T^*	Temperatura adimensional = $T - T_{sat} / (T_{sup} - T_{sat})$.
T_O	Escala de tiempo = $\alpha \ell / R^2 Ja$, s .
u	Velocidad, m/s .
u^*	Velocidad adimensional = u / V_O .
V_O	Escala de velocidad = $(\sigma / \rho \ell R_e We)^{1/2}$.
We	Número de Weber = $\sigma / R \epsilon \sigma \ell V_O^2$.
α	Difusividad térmica, m^2/s .
δ	Espesor de la capa límite, m .
Δ	Diferencia.
ϵ	Transferencia de masa adimensional debido a evaporación = $1 - \rho_v / \rho_\ell$.

ν	Viscosidad cinemática, m^2/s .
π	Constante numérica = 3,14159...
ρ	Densidad, Kg/m^3 .
σ	Tensión superficial, Kg/s^2 .
ϕ^*	Función forzante adimensional.
ϕ	Función forzante = $-\partial p/\rho \ell \partial r$, m/s .
Ω	Parámetro adimensional = $\text{Ja} \sqrt{\text{We}}/\epsilon M$.

SUBINDICE

ℓ	Líquido.
sat	Saturado.
sup.	Supercalentado.
v	Vapor.
ω	Pared.

REFERENCIAS

1. RAYLEIGH, LORD, "On the pressure developed in a liquid during the collapse of a spherical cavity", Phil. Mag. 34, 94-98 (1917); Scientific Papers, Vol. 6, Cambridge University Press, Cambridge (1920).
2. BOSNJAKOVIĆ, F., "Verdampfung und Flüssigkeitsüberhitzung", Tech. Mech. Thermo-Dynam. Berl. 1, 358-362 (1930).
3. JAKOB, M., "Heat transfer in evaporation and condensation", Mech. Engrg., 58, 643-660, 720-739 (1936).
4. KAST, W., "Bedntung der Keimbildung und instationären Wärmeübertragung bei Blasenverdampfung und Tropfenkondensation", Chem. Ing. Tech., 36(9), 933-940 (1964).
5. VAN STRALEN, S.J.D., "The mechanism of heat transfer in nucleate pool boiling, Parts I-IV", Int. J. Heat Mass Transfer, 9, 995-1020, 1021-1046 (1966); 10, 1469-1484, 1485-1498 (1967).
6. HAN, CH. Y. and P. GRIFFITH, "The mechanism of heat transfer in nucleate pool boiling", Int. J. Heat Mass Transfer, 8, 887-914 (1965).
7. PLESSET, M.S. and S.A. ZWICK, "The growth of vapor bubbles in superheated liquids", J. Appl. Phys. 25, 493-500 (1954).
8. FORSTER, H.K. and N. ZUBER, "Growth of a vapor bubble in superheated liquid", J. Appl. Phys., 25, 474-478 (1954).
9. SCRIVEN, L.E., "On the dynamics of phase growth", Chem Engrg. Sci., 10, 1-13 (1959).
10. COOPER, M.G. and R.M. VIJUK, "Bubble growth in nucleated pool boiling", Proc. 4th Int. Heat Transfer Conf., Paris-Versailles, Vol. V, p. B2.1, Elsevier, Amsterdam (1970).
11. VAN OUWERKERK, H.J., "The rapid growth of a vapour bubble at a liquidsolid interface", Int. J. Heat Mass Transfer, 14, 1415-1431 (1971).
12. VAN STRALEN, S.J.D., M.S. SOHAL, R. COLE and W.M. SLUYTER, "Bubble growth rates in pure and binary systems: combined effect of relaxation and evaporation microlayers", Int. J. Heat Mass Transfer, 18, 453-467 (1975).
13. MIKIC, B.B., W.M. ROHSENOW and P. GRIFFITH, "On bubble growth rates", Int. J. Heat Mass Transfer, 13, 657-666 (1970).
14. SNYDER, N.W., "Summary of conference on bubble dynamics and boiling heat transfer held at the jet propulsion laboratory, JPL Memo No. 20-137", Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology (1956).
15. MOORE, F.D. and R.B. MESLER, "The measurement of rapid surface temperature fluctuations during nucleate boiling of water", A.I.Ch.E. Jl., 7, 620-624 (1961).
16. MADSEN, N. and C.F. BONILLA, "Heat transfer to sodium potassium alloy in pool boiling", Chem. Engrg. Prog. Symp. Ser. N° 30, 56, 251-259 (1960).
17. COOPER, M.G. and A.J.P. LLOYD, "Transient local heat flux in nucleate boiling", Proc. 3rd Int. Heat Transfer Conf., Chicago, Vol. 3, 193-203 (1966).
18. TORIKAI, K., "Heat transfer in a contact area of a boiling bubble of a heating surface", Bull. J.S.M.E., 10, 338-348 (1967).

19. SHARP, R.R., "The nature of liquid film evaporation during nucleate boiling", NASA TN-D-1997 (1964).
20. JAWREK, H.H., "Simultaneous determination of microlayer geometry and bubble growth in nucleate boiling", *Int. J. Heat Mass Transfer*, 12, 843-848 (1969).
21. VAN STRALEN, S.J.D. and R. COLE, "Boiling Phenomena: Physicochemical and Engineering Fundamentals and Application", Vol. 2, Chaps. 14-15, McGraw-Hill Book Co., New York (1979).
22. POHLHAUSEN, E., "Der Wärmeaustausch zwischen festen Körpern und Flüssigkeiten mit Kleiner Reibung und Wärmeleitung", *Z. Angew. Math. Mech.*, 1, 115-121 (1921).
23. PUZYREV, Y.E.M., A.D. GORBUNOV, A.V. KUZ'MIND and V.V. SALOMATOV, "Theory of the formation and evaporation of the microlayer", *Heat Transfer-Soviet Research*, Vol. 8, N° 4, July-August, 47-51 (1976).
24. KAYS, W.M. and M.E. CRAWFORD, *Convective Heat and Mass Transfer*, 2nd Edition, McGraw-Hill Book Co., New York (1980).